

2/12/2015

: HATON

$\mathcal{A} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{αριθμητική}\} = \text{σύνολο αριθμητικών συναρτήσεων}$

- ① $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \tau(n) = \text{πλήθος φυσικών διαιρετών α } n$
- ② $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sigma(n) = \text{άθροισμα } \# \#$
- ③ $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \phi(n) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \begin{matrix} 1 \leq k \leq n \\ (k, n) = 1 \end{matrix} \right\} \right|$ Συνάρτηση του Euler ...
- ④ $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{Επρώτος } p: p^2 | n \\ (-1)^k, & n=p_1 \dots p_k \end{cases}$ Συνάρτηση του Möbius

$$f * g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f(d_1) g\left(\frac{n}{d_1}\right) + f(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right) + \dots + f(d_{\tau(n)}) g\left(\frac{n}{d_{\tau(n)}}\right)$$

Παρατήρηση: $\{d_1, \dots, d_{\tau(n)}\} = \left\{ \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_{\tau(n)}} \right\}$

↓
Σύνολο των διαιρετών του n

$f * g$: Ενεργητικό γινόμενο ή γινόμενο Dirichlet, των f, g

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f, g \in \mathcal{A}: (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ a, b \in \mathbb{N}}} f(a) g(b)$$

Παράδειγμα Έστω $n=18$. Διαιρέτες του 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

$$\phi(18) = |\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}| = 6$$

$$\mu(18) = \mu(2 \cdot 3^2) = 0$$

$$\begin{aligned} (\phi * \mu)(18) &= \phi(1)\mu(18) + \phi(2)\mu(9) + \phi(3)\mu(6) + \phi(6)\mu(3) \\ &\quad + \phi(9)\mu(2) + \phi(18)\mu(1) = \\ &= \cancel{1 \cdot 0} + \cancel{1 \cdot 0} + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$(\mu * \phi)(18) = (\phi * \mu)(18)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f, g, h \in A$, τότε:

- ① $[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$ Προσεταιριστική ιδιότητα
- ② $f * g = g * f$ Μεταθετική ιδιότητα
- ③ $f * e = f = e * f$, όπου $e: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $e(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$ Υπάρχει αδεύτερο στοιχείο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\textcircled{1} [(f * g) * h](n) = \sum_{a \cdot b = n} (f * g)(a) h(b) = \sum_{a \cdot b = n} \left(\sum_{c \cdot d = a} f(c) g(d) \right) h(b) =$$

$$= \sum_{c \cdot d \cdot b = n} f(c) g(d) h(b) \quad \textcircled{1}$$

$$[f * (g * h)](n) = \sum_{r \cdot s = n} f(r) (g * h)(s) = \sum_{r \cdot s = n} f(r) \cdot \sum_{k \cdot \lambda = s} g(k) h(\lambda) =$$

$$= \sum_{r \cdot k \cdot \lambda = n} f(r) g(k) h(\lambda) \quad \textcircled{2}$$

Από $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ Από εναίδη

$$[f * (g * h)](n) = [(f * g) * h](n) \Rightarrow f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$\textcircled{2} (f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) g(b) = \sum_{b \cdot a = n} g(b) f(a) = (g * f)(n), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f * g = g * f$$

$$\textcircled{3} (f * e)(n) = \sum_{d|n} f(d) e\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) e(d) = f(n) e(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d > 1}} f\left(\frac{n}{d}\right) e(d) =$$

$$= f(n) \cdot 1 + 0 = f(n), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f * e = f \stackrel{\textcircled{2}}{=} e * f$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Αν $f \in A$, υπάρχει $g \in A$: $f * g = \varepsilon = g * f$;

Αν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, τότε αυτή η συνάρτηση είναι μοναδική και καλείται ενεργητικά αντίστροφη της f και θα συμβολίζεται με f^{-1} , δηλαδή f^{-1} είναι η ενεργητικά αντίστροφη της f , δηλαδή η f^{-1} είναι η μοναδική συνάρτηση: $f * f^{-1} = \varepsilon = f^{-1} * f$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $f \in A$, τότε η ενεργητικά αντίστροφη της f υπάρχει
 $\Leftrightarrow f(1) \neq 0$

$$f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & \text{αν } n=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{c+d=n \\ d \leq n}} f(c) f^{-1}(d) \end{cases}$$

$\mathcal{U} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0\}$: σύνολο των ενεργητικά αντιστρέπτων συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ① $T(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow T \in \mathcal{U}$

② $\sigma(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \sigma \in \mathcal{U}$

③ $\varphi(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{U}$

④ $\mu(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \mu \in \mathcal{U}$

Από εδώ και πέρα όλες οι συναρτήσεις θα είναι ενεργητικά αντιστρέπτει.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f, g \in \mathcal{U}$ τότε: $f * g \in \mathcal{U}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(f * g)(1) = f(a)g(b) = f(1) \cdot g(1)$

Από το Θεώρημα $\Rightarrow f(1) \neq 0$ διότι $f \in \mathcal{U}$
 $\Rightarrow (f * g)(1) \neq 0 \Rightarrow f * g \in \mathcal{U}$

ΠΟΛΥΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: Μια αριθμητική ανάρτηση $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται πολλαπλασιαστική
 Εί $f \neq 0$ σημαίνει $\exists k \in \mathbb{N} : f(k) \neq 0$ και:

$$\text{Συμβαίνει } \mu \in \mathcal{M} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{rel}/\text{rel}\} \subseteq \mathcal{A}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ισχύει ότι $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$;

Έστω $f \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : f(k) \neq 0$ Τότε επειδή $(k, 1) = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(k) = f(k \cdot 1) = f(k) \cdot f(1)$

Επειδή $f(k) \neq 0 \Rightarrow f(1) = 1 \neq 0$ Άρα $f \in \mathcal{U}$ και οφείλει:
 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $a, b, c \in \mathbb{N}$ και $(b, c) = 1$. Τότε:
 $(a, bc) = (a, b) (a, c)$

Απόδειξη: Θυμίζουμε $d = (a, bc)$, $d_1 = (a, b)$ και $d_2 = (a, c)$.
 Όσο $d = d_1 \cdot d_2$

Θα δείξουμε πρώτα ότι: $(d_1, d_2) = 1$. Έστω $x = (d_1, d_2)$ Τότε

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} x \mid d_1 \text{ και } d_1 \mid b &\Rightarrow x \mid b \\ x \mid d_2 \text{ και } d_2 \mid c &\Rightarrow x \mid c \end{aligned} \Rightarrow x \mid (b, c) = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ Άρα } (d_1, d_2) = 1 \quad (*)$$

$$d_1 = (a, b) \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : d_1 = ax + by$$

$$d_2 = (a, c) \Rightarrow \exists x_2, y_2 \in \mathbb{Z} : d_2 = ax_2 + cy_2$$

$$\begin{aligned} d_1 d_2 &= aax_1x_2 + acx_1y_2 + abx_2y_1 + bcy_1y_2 \\ &= a(ax_1x_2 + cx_1y_2 + bx_2y_1) + bc y_1y_2 \end{aligned}$$

Παρα είναι $d_1 d_2 = (a, bc) = d$, θα γίνει: $d_1 d_2 \mid a$ και $d_1 d_2 \mid bc$

$$\begin{array}{l} d_1 = (a, b) \Rightarrow d_1 | b \\ d_2 = (a, c) \Rightarrow d_2 | c \end{array} \quad \Rightarrow d_1 d_2 | bc$$

$$\begin{cases} d_1 = (a, b) \Rightarrow d_1 | a \\ d_2 = (a, c) \Rightarrow d_2 | a \end{cases} \xrightarrow{*} d_1 d_2 | a$$

$$\text{Αρα } d = d_1 d_2$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(a_i, a_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n+1$

$$\text{Τότε: } (a_{n+1}, a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_{n+1}, a_1)(a_{n+1}, a_2) \dots (a_{n+1}, a_n)$$

Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ [Εφαρμογή της AMG]